

DOSSIER LÍMITES

1. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

Soluciones ejercicio 1:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\frac{3}{2}$$

- b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por 5 :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$$

- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 3 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

- e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \pm\infty$$

EXERCICIS PER PRACTICAR

2. Resuelve los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 1}{2x + 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^3 + 2x^2 - 1}{2x + 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x + 2}{5x^2 + x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^6 + 3x^3 + 2}{7x^6 + x - 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^6 + 3x^3 + 2}{7x^6 + x - 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{x(x^2 + 1)}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{2x^4 + 3x - 11}}{\sqrt[7]{x^3 + 2}}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^9 - 2x^5 + x^2}}{\sqrt[5]{3x^{15} - x^2}}$$

Soluciones ejercicio 2:

$$a) +\infty \quad b) -\infty \quad c) -\infty \quad d) \frac{3}{7} \quad e) \frac{3}{7} \quad f) 0 \quad g) +\infty \quad h) \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[15]{9}$$

3. Resuelve los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 1}}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x - 2}}{x^2 - 36}$$

Soluciones ejercicio 3:

$$a) -3 \quad b) 1 \quad c) -\frac{1}{48}$$

EXERCICIS PER PRACTICAR

4. Resuelve los siguientes límites:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 5x - 6} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$$

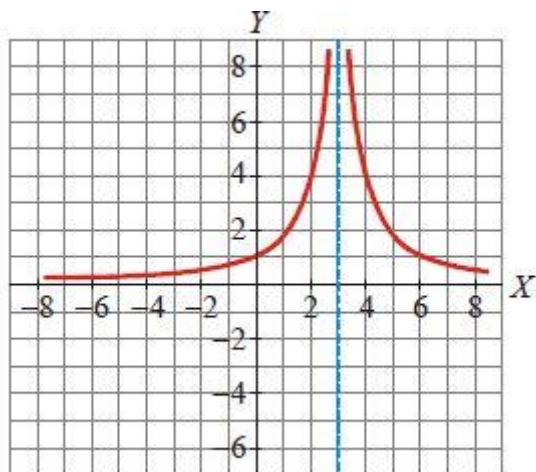
Soluciones ejercicio 4:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{5}{7} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \nexists$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$$

5. Calcula Los siguientes límites a partir de la gráfica de f(x):



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

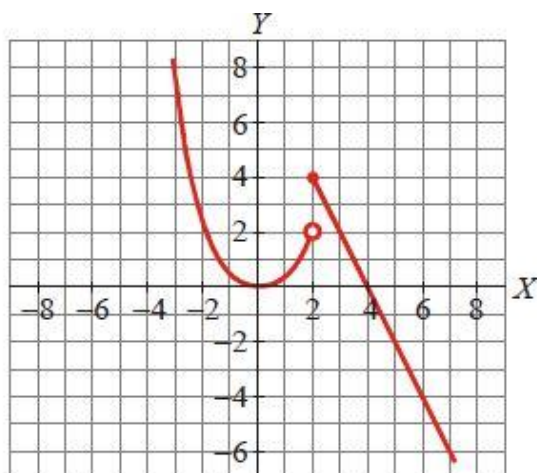
Soluciones ejercicio 5:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \quad e) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \quad f) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \nexists$$

EXERCICIS PER PRACTICAR

6. Calcula Los siguientes límites a partir de la gráfica de $f(x)$:



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

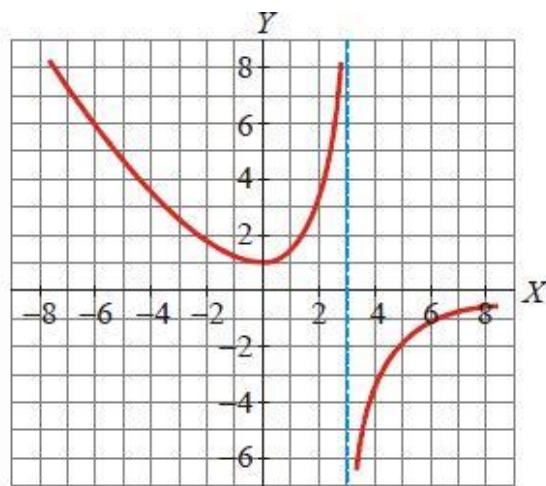
f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Soluciones ejercicio 6:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$ e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \nexists$

7. Calcula Los siguientes límites a partir de la gráfica de $f(x)$:



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Soluciones ejercicio 7:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \nexists$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ e) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ f) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$

EXERCICIS PER PRACTICAR

8. Di el dominio y estudia la continuidad de estas funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } -6 \leq x < -2 \\ 1 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ -2x+13 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 3 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2+x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{x+3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 5 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \\ (x+3)^2 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x-1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Soluciones ejercicio 7:

a) $Df = [-6, -2) \cup (-2, 5) \cup (5, +\infty)$

D. evitable en $x = -2$, D. salto en $x = 1$, Continua en $x = 3$, D. evitable en $x = 5$

b) $Df = \mathbb{R} - \{1\}$

D. asintótica en $x = 0$, D. evitable en $x = 1$

c) $Df = \mathbb{R} - \{-3, -2, 0\}$

D. evitable en $x = 0$, D. asintótica en $x = -2$, D. asintótica en $x = -3$

d) $Df = \mathbb{R}$

Continua en $x = 2$, D. salto en $x = 4$

e) $Df = \mathbb{R}$

D. evitable en $x = -2$, D. salto en $x = -1$, D. asintótica en $x = 2$

EXERCICIS PER PRACTICAR

9. Dibuja una función que cumpla con las siguientes condiciones:

9.1.

a) $Df = \mathbb{R} - \{0,3\}$

b) *Discontinuidad evitable en $x = -1$*

c) *Discontinuidad asintótica en $x = 3$*

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

9.2.

a) *Discontinuidad de salto en $x = 2$*

b) *Que exista en $(1,3)$*

c) *Discontinuidad evitable en $x = 1$*

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

9.3.

a) $Df = \mathbb{R}$

b) *Discontinuidad evitable en $x = -3$*

c) *Discontinuidad de salto en $x = 0$*

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

EXERCICIS PER PRACTICAR

10. Calcula los siguientes límites de las discontinuidades de la gráfica de $f(x)$ y señala su tipo:

