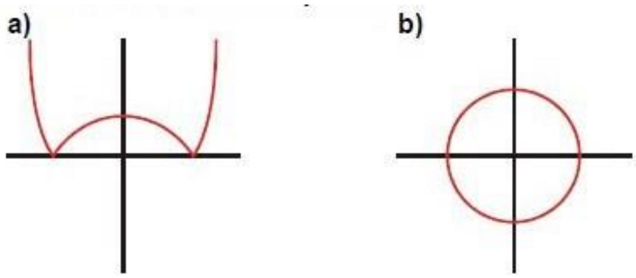
DOSSIER FUNCIONS

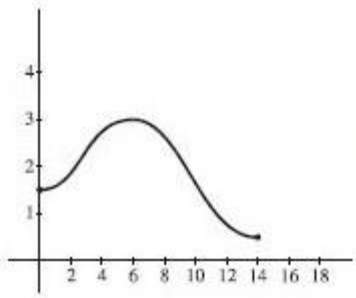
Funcions i Característiques:

1. **Indica quines de les següents representacions corresponen a la gràfica d'una funció. Raona la teva resposta:**



Solució: En una funció, a cada valor de x li correspon un únic valor de y. Per tant, , a) és una funció i b) no ho és.

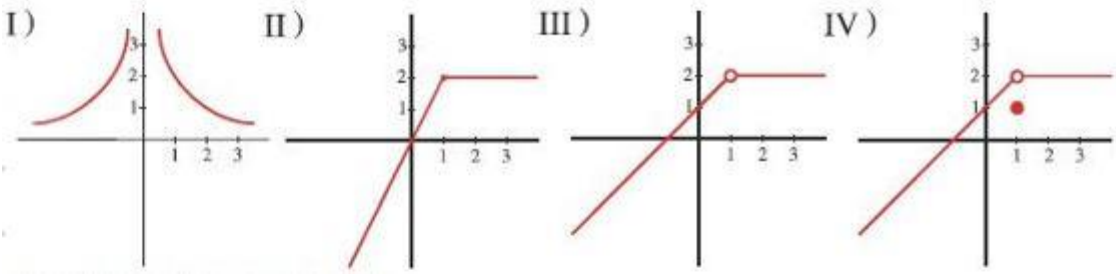
2. **La següent gràfica correspon a la funció y=f(x):**
   a) Quin és els seu domini?
   b) Indica els intervals de creixement i decreixement.
   c) En quin punt té un màxim?



Solució:

a) [0, 14]
b) És creixent en [0, 6] i decreixent en [6, 14]
c) El màxim està al punt (6, 3)

3. **Donades les funcions:**

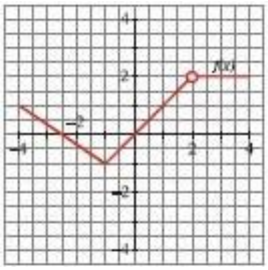


a) Digues si son contínues o no.
b) Troba la imatge de 1 per a cada una de les quatre funcions.

Solució:

a) Només és continua la II)
b) I) y=2 II) y=2 III) y=No existeix IV) y=1

4. Donada la gràfica:



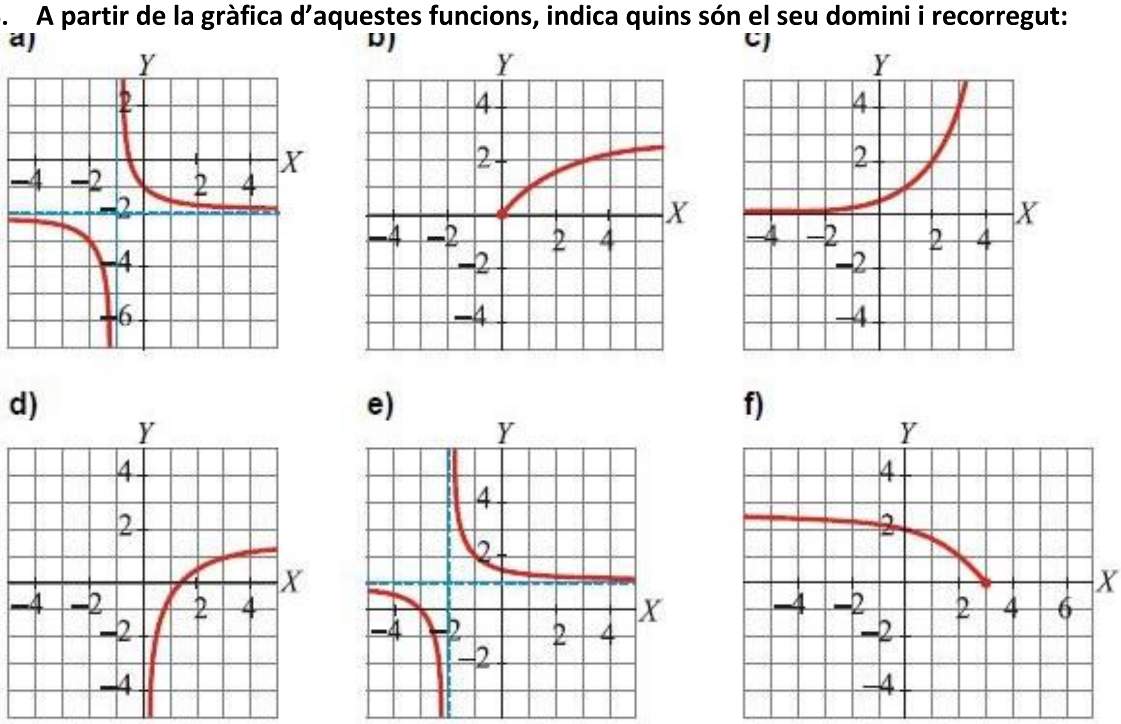
a) Digues si f(x) és contínua o no. Raona la teva resposta.
b) Troba f(-1), f(0), f(2), f(3).

Solució:

a) No és contínua perquè a x=2 no està definida (discontinuïtat evitable)

b) f(-1)=-1, f(0)=0, f(2)=no existeix, f(3)=2

5. A partir de la gràfica d'aquestes funcions, indica quins són el seu domini i recorregut:



Solució:

a) $Df = R - \{-1\}$ i $Rf = R - \{-2\}$

b) $Df = [0, +\infty)$ i $Rf = [0, +\infty)$

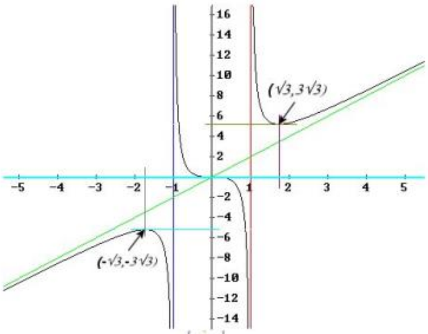
c) $Df = R - \{0\}$ i $Rf = (0, +\infty)$

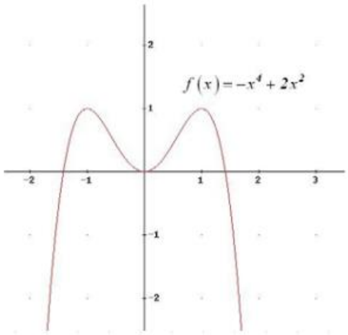
d) $Df = (0, +\infty)$ i $Rf = R$

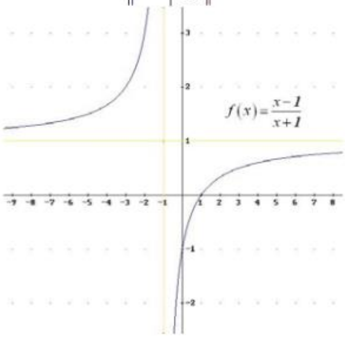
e) $Df = R - \{-2\}$ i $Rf = R - \{1\}$

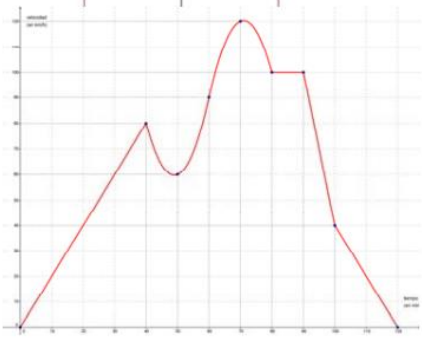
f) $Df = (-\infty, 3]$ i $Rf = (0, +\infty)$

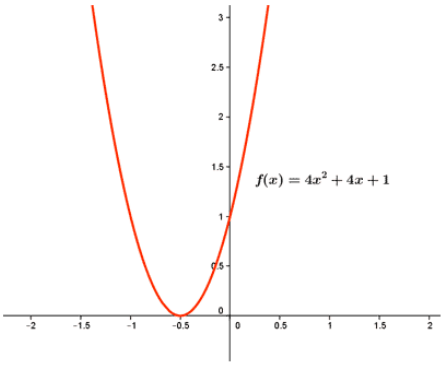
6. Dóna les característiques de les següents gràfiques:

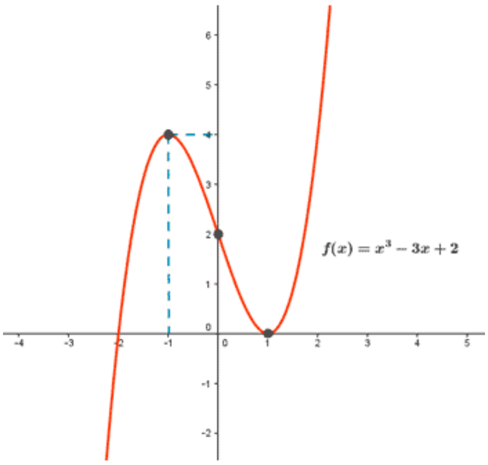
a) 

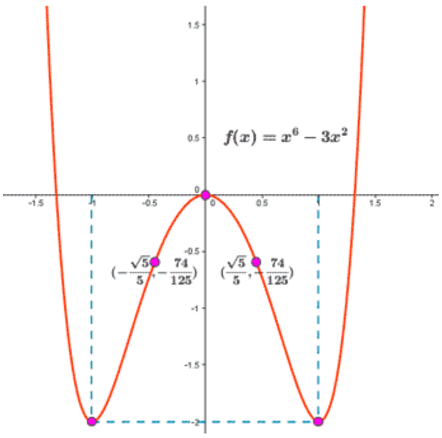
b) 

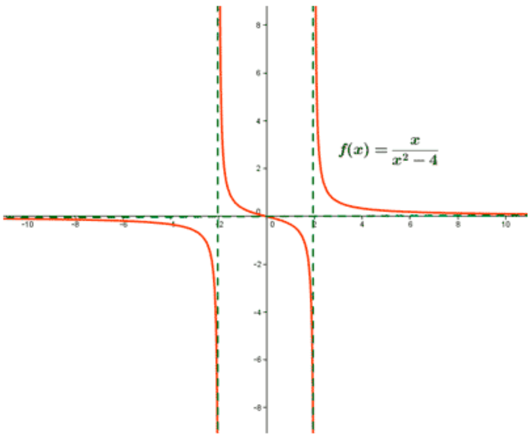
c) 

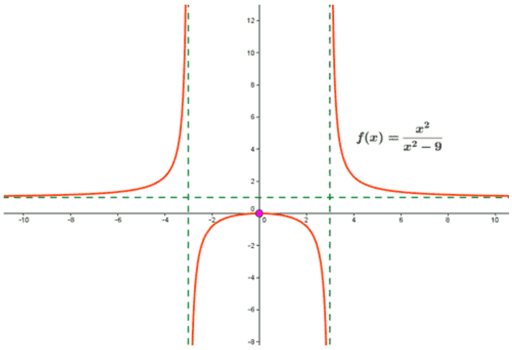
d) 

e) 

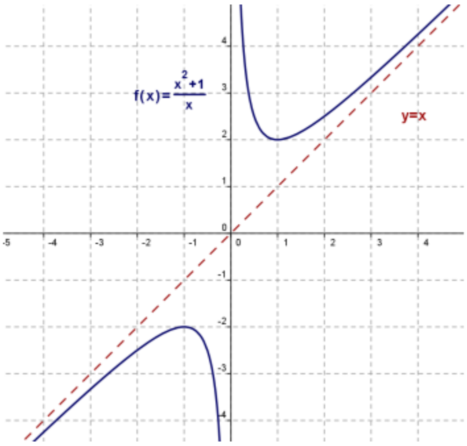
f) 

g) 

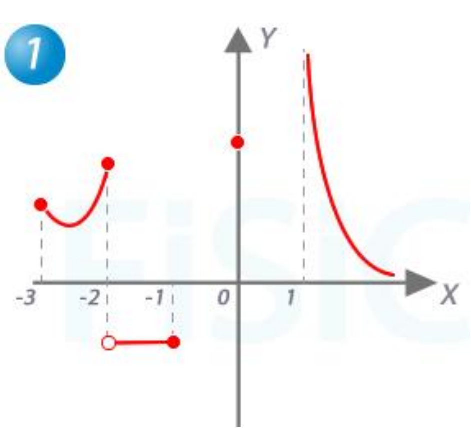
h) 


$f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$

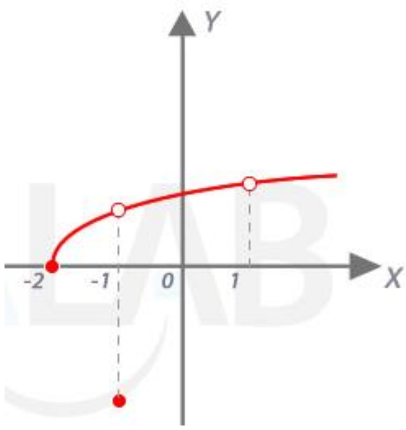
i)


$f(x)=\frac{x^2+1}{x}$
y=x

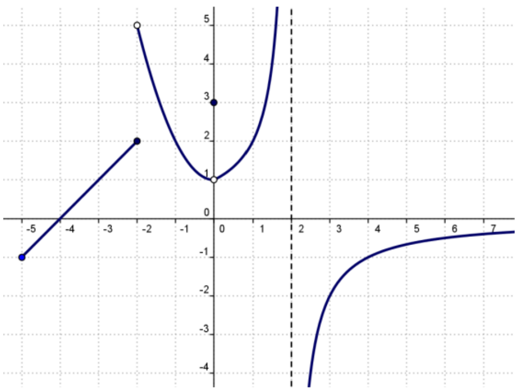
j)


1
Y
X

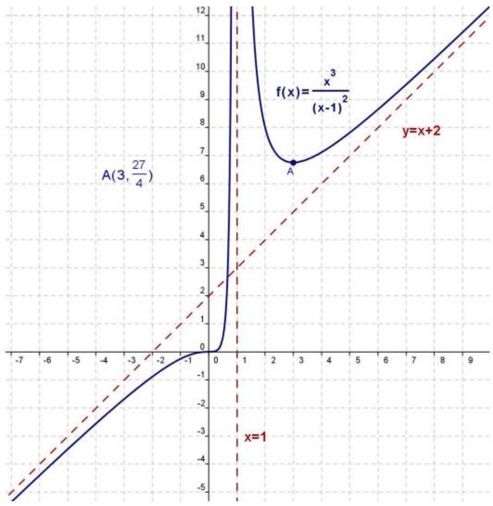
k)


Y
X

l)

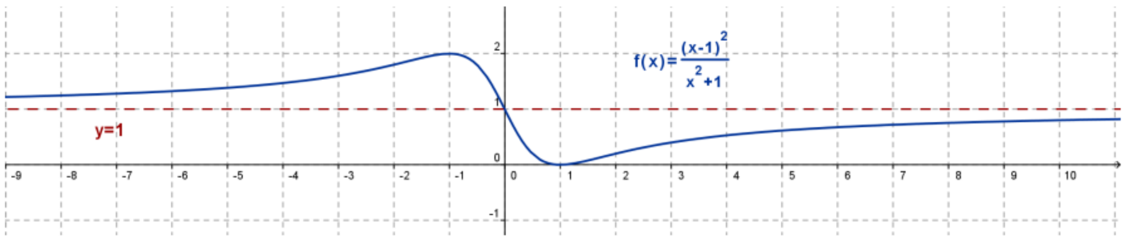


m)


$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$
y=x+2
$A(3, \frac{27}{4})$
A
x=1

n)

o)


$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$
y=1

Càlcul analític de dominis:

7. Troba el domini de les següents funcions:

a) $y = \dfrac{1}{x^2-16}$ b) $y = \sqrt{1+2x}$ c) $y = \dfrac{x}{x^2-4}$ d) $y = \sqrt{2x}$ e) $y = \dfrac{1}{x^2+4}$

f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ g) $y = \dfrac{1}{x^2-2x}$ h) $y = \sqrt{6+3x}$ i) $y = \dfrac{3}{(x-5)^2}$ j) $y = \sqrt{2x-4}$

k) $y = \dfrac{1}{x^2-9}$ l) $y = \sqrt{x-2}$ m) $y = \dfrac{2+x}{x^2}$ n) $y = \sqrt{3x-1}$ ñ) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

o) $y = \dfrac{1}{3x-x^2}$ p) $y = \sqrt{x^2-1}$ q) $y = \dfrac{2x}{(x-3)^2}$

Solució:

a) $Df = R - \{-4, 4\}$
b) $Df = \left[\frac{-1}{2}, +\infty\right)$
c) $Df = R - \{-2, 2\}$
d) $Df = [0, +\infty)$
e) $Df = R$
f) $Df = (2, +\infty)$
g) $Df = R - \{0, 2\}$
h) $Df = [-2, +\infty)$
i) $Df = R - \{5\}$
j) $Df = [2, +\infty)$
k) $Df = R - \{-3, 3\}$
l) $Df = [2, +\infty)$
m) $Df = R - \{0\}$
n) $Df = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

ñ) $Df = (0, +\infty)$

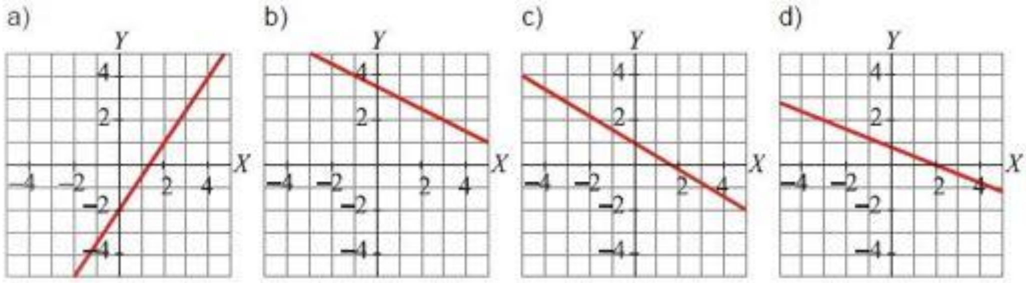
o) $Df = R - \{0, 3\}$
p) $Df = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
q) $Df = R - \{3\}$

Funcions lineals:

8. Representa les següents funcions:

a) $y = \frac{3}{2}x - 2$ **b)** $y = -0{,}5x + 3{,}5$ **c)** $y = \frac{-3}{5}x + 1$ **d)** $f(x) = \frac{4 - 2x}{5}$

Solució:



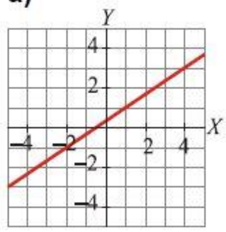
9. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts (3, -4) i (-2, 3).

Solució:

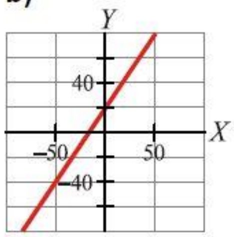
$$y = \frac{-7}{5}x + \frac{1}{5}$$

10. Escriu l'equació de les rectes representades:

a)



b)



Solució:

a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

b) $y = \frac{6}{5}x + 20$

11. Troba l'equació de la recta que passa per (-1, 2) i que té pendent $-\frac{1}{3}$.

Solució:

$$y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{3}$$

Interpolació i extrapolació:

12. Estem fent el seguiment de l'alçada d'un nadó en els seus primers mesos de vida. En el primer mes, aquest mesura 51 cm. En el quart mes, mesura 57 cm. i en el vuitè, el nadó mesura 63'5 cm.

i. Mitjançant la interpolació lineal, aproxima la llargària que va tenir en el tercer mes.
ii. Repeteix l'operació per calcular quan mesura el nadó en el sisè mes.
iii. Si sabéssim amb exactitud la mesura feta en el cinquè mes, canviaria això en alguna cosa el què has fet en l'apartat b). Per què?
iv. Estima la llargària del nen als sis anys. Què pots dir del resultat?

Solució:

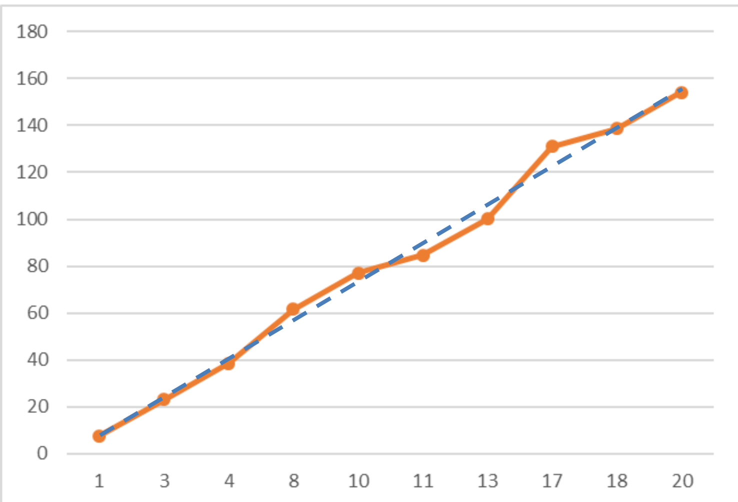
a) 55cm b) 60,25cm c) Caldria agafar la mesura del cinquè mes i del vuitè per fer la interpolació, ja que seria més precisa. d) 167,5cm. Aquest resultat és molt poc fiable per ser una extrapolació molt llunyana de les mesures donades. El nen no sempre creixerà al mateix ritme.

13. La taula següent conté les dades del volum i la massa de peces de ferro de diferents dimensions.

i. Representa gràficament aquestes dades.
ii. Com es troben aquests punts? A partir d'aquesta observació quin tipus de funció podem preveure per tal d'obtenir la massa en funció del volum?
iii. Troba la fórmula d'aquesta funció.

Volum (cm^3)	Massa (g)
1	7,7
3	23,1
5	38,5
8	61,6
10	77
11	84,7
13	100,1
17	130,9
18	138,6
20	154

Solució:

a)


b) Els punts es troben quasi alineats. Es podria preveure que la funció que més s'aproxima és una recta.

c) Agafem com a punts el primer i l'últim: f(x) = $2{,}44 \cdot x + 5{,}26$

Col·legi Abat Oliba Loreto

14. El preu del rebut de la llum ve donat aproximadament per una funció lineal

$$p(x) = n + m \cdot x \qquad on \begin{cases} n = despeses\ de\ potència \\ m = preu\ del\ kWh\ en\ euros \end{cases}$$

S'han agafat dos rebuts successius i se n'ha extret aquesta taula de consum i preu (sense IVA):

x	$p(x)$
84	18,36
61	14,86

Troba el valor d'n i m.

Solució: F(x)=0,15·x+5,58

15. El preu d'un viatge amb tren està en funció dels quilòmetres recorreguts. Si es recorren 57 km, el bitllet costa 2,85 €, i si se'n recorren 68, 3,40 €.

i. Busca la funció lineal que expressa el cost del bitllet en funció dels quilòmetres recorreguts.

ii. Calcula per extrapolació el preu del bitllet quan la distància recorreguda és de 500 km.

iii. Si un bitllet costa 4€, quants quilòmetres té el recorregut?

Solució: a) f(x)=0,05·x b) 25€ c) 80km

16. La taula següent recull la taxa d'atur als EUA, mesurada en dos moments de la dècada dels anys 60 en què hi havia diferents taxes d'inflació:

Inflació %	1,9	3,6
Atur %	4,4	3,7

i. Determina la interpolació lineal $P(x) = ax + b$

ii. Calcula el valor de la taxa d'atur en un moment en que la taxa d'inflació fos del 3%.

Solució: a) P(x)=-0,41·x+5,18 b) 3,95%

17. Un municipi tenia 2540 habitants l'any 1990 i 3260 l'any 2000.

i. Utilitza la interpolació lineal per estimar quants habitants tenia el municipi l'any 1996.

ii. En quin any va assolir previsiblement els 3000 habitants

Solució: a) 2972 habitants b) Aproximadament l'abril de 1996

18. En una habitació que es troba a la temperatura de 20ºC hem retirat del foc mig litre d'aigua bullint. Mesurem la temperatura de l'aigua després de 10, 30 i 50 minuts i obtenim les dades següents:

Temps (min)	10	30	50
Temperatura(ºC)	85	50	36

i. Representa els punts donats i la funció que els caracteritza.

ii. Per interpolació lineal, determina la temperatura de l'aigua 25 i 35 minuts després d'haver-la retirat del foc.

iii. Per extrapolació lineal, determina la temperatura de l'aigua als 5 i als 60 minuts després d'haver-la retirat del foc.

Funcions quadràtiques:

19. Representa gràficament les funcions i digues el (1) Dom f(x), (2) Rec f(x), (3) intervals de creixement i de decreixement, (4) màxims/mínims i (5) punts de tall amb els eixos:

a) $y=-x^2+4x-1$ **b)** $y=(x+1)^2-3$ **c)** $y=-x^2+4$ **d)** $f(x)=-2x^2+4x$

Solució:

a) *Df=R*

$Rf=(-\infty,3]$

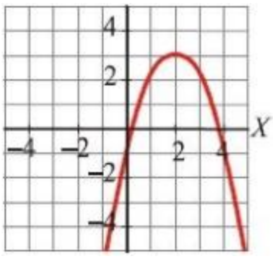
$f\ creix\ a\ (-8,2)$

$f\ decreix\ a\ (2,+\infty)$

Màxim en x=2

$\cap\ OX\ en\ x=0, x=4$

$\cap\ OY\ en\ y=0$



b) *Df=R*

$Rf=[-3,+\infty)$

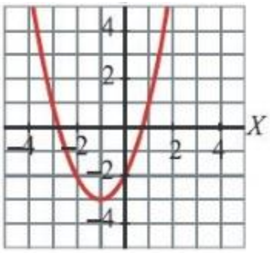
$f\ creix\ a\ (-1,+\infty)$

$f\ decreix\ a\ (-\infty,-1)$

Mínim en x=-1

$\cap\ OX\ en\ x=-1-\sqrt{3}, x=-1+\sqrt{3}$

$\cap\ OY\ en\ y=-2$



c) *Df=R*

$Rf=(-\infty,4]$

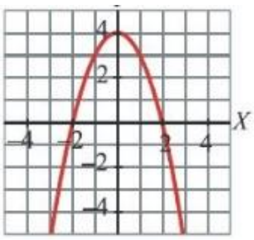
$f\ creix\ a\ (-\infty,0)$

$f\ decreix\ a\ (0,+\infty)$

Màxim en x=0

$\cap\ OX\ en\ x=-2, x=2$

$\cap\ OY\ en\ y=4$



d) *Df=R*

$Rf=(-\infty,2]$

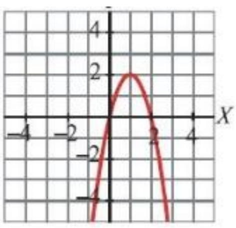
$f\ creix\ a\ (-\infty,1)$

$f\ decreix\ a\ (1,+\infty)$

Màxim en x=1

$\cap\ OX\ en\ x=0, x=2$

$\cap\ OY\ en\ y=0$



20. Troba l'equació de la funció quadràtica que passa pels punts A(10,10) , B(20,28) , C(30,12).

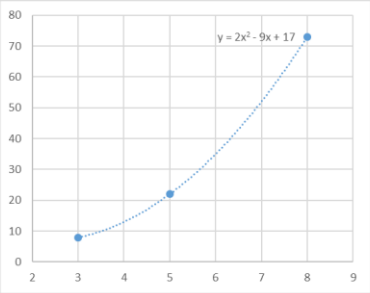
Solució: $f(x) = -0{,}07x^2 + 2{,}9x - 12$

21. A la taula següent s'indica el temps en dies i el pes en grams d'un embrió d'una espècie animal:

temps	3	5	8
pes	8	22	73

i. Trobar el polinomi d'interpolació quadràtica de les dades
ii. Representar la funció obtinguda i els punts de les dades.
iii. Fer una predicció de pes per 6,5 dies

Solució:

i. $f(x) = 2x^2 - 9x + 17$ ii. 

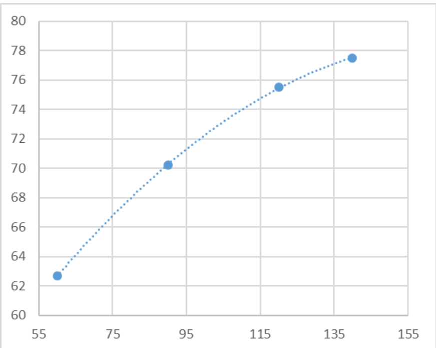
iii. $f(6{,}5) = 43$

22. En una fàbrica d'automòbils, un model de cotxe X produeix a diferents velocitats els nivells de soroll que registra la taula:

Km/h	60	90	120	140
Decibels	62,7	70,2	75,5	77,5

i. Representa les dades donades
ii. Estimar per interpolació quadràtica els decibels produïts quan la velocitat és de 130 km/h.

Solució:

i. 

ii. $f(x) = -0{,}0015x^2 + 0{,}4987x + 37{,}74 \;\text{—>}$

$f(130) = 77{,}22$

Funcions definides a trossos:

23. Representa les següents funcions.

a) $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & \text{si } x<1 \\ 4x & \text{si } x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si } x<2 \\ x+3 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<4 \\ 2x & \text{si } x>4 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x>0 \\ 2 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<-3 \\ -2 & \text{si } x\geq -3 \end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3 & \text{si } x\leq 0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$ h) $f(x)=x^2-1 \text{ si } x\neq 2$ i) $f(x)=-1 \text{ si } x\neq -5$

j) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x>1 \\ x^2-1 & \text{si } x<1 \end{cases}$ k) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x=1 \\ 1-x & \text{si } x>1 \end{cases}$ l) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ x+2 & \text{si } 0<x<2 \\ 4 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

24. Representa les següents funcions i contesta a les preguntes següents:

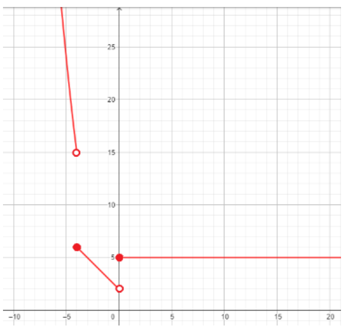
a) $$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x<-4 \\ -x+2 & si\ -4\leq x<0 \\ 5 & si\ 0\leq x \end{cases}$$

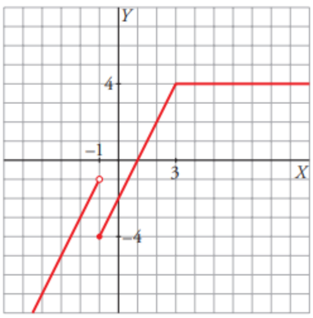
b) $$f(x)=\begin{cases} 1+2x & \text{si } x<-1 \\ 2x-2 & \text{si } -1\leq x<3 \\ 4 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

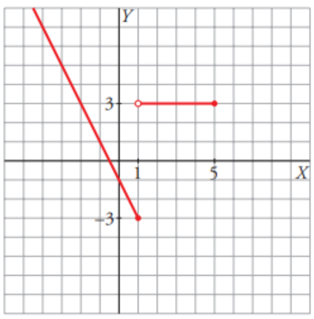
c) $$f(x)=\begin{cases} -2x-1 & \text{si } x\leq 1 \\ 3 & \text{si } 1<x\leq 5 \end{cases}$$

i. **Calcula les imatges de: -6 , -4 , -1/2 , -0,2 , 0 , 1 , 3/2 , 4**
ii. **Dóna el domini i recorregut observant la gràfica**
iii. **Estudia el creixement i decreixement observant la gràfica**
iv. **Estudia la continuitat de la funció observant la gràfica**

Solución:

a)


b)


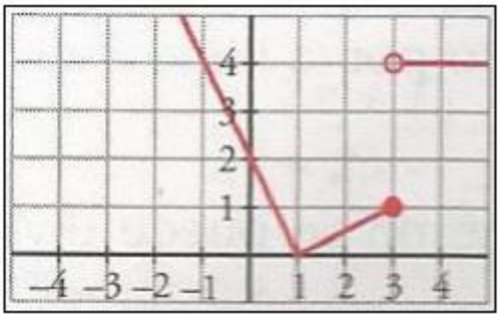
c)


25. Troba f(-1), f(0) i f(2), sent $f(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & si \quad x\le -1 \\ x+1 & si \quad -1<x\le 2 \\ x^2 & si \quad x>2 \end{cases}$

Solució:

f(-1)=2 *f(0)=1* *f(2)=3*

26. Escriu l'expressió analítica corresponent a la gràfica:



Solució:
$$y=\begin{cases} -2x+2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \ 1<x\le 3 \\ 4 & \text{si} \ \ x>3 \end{cases}$$

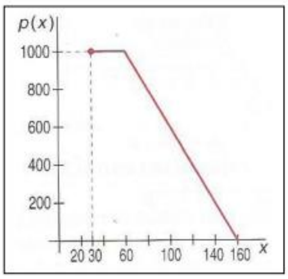
27. Una agència de viatges organitza un creuer per la Mediterrània. El preu del viatge és de 1000 € si reuneix entre 30 i 60 passatgers; quan el nombre és menor de 30, el creuer se suspèn. Però, si supera els 60, fa una rebaixa de 10 euros a cada participant per cada nou passatger.

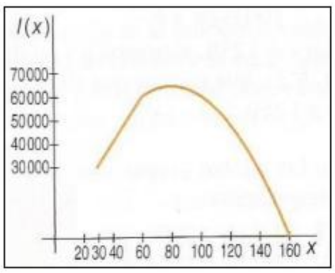
i. Troba la funció que dóna el preu del creuer depenent del nombre de viatgers. Representa-la gràficament.

ii. Calcula la funció que dóna l'ingrés total que obté l'agència organitzadora a funció del nombre de viatgers. Representa-la gràficament.

iii. Critica els resultats trobats.

i. $p(x)=\begin{cases} 1000 & \text{si} \ 30\le x\le 60 \\ 1600-10x & \text{si} \ \ x>60 \end{cases}$

i. 

ii. 

ii. $I(x)=\begin{cases} 1000\,x & \text{si} \ 30\le x\le 60 \\ 1600x-10x^2 & \text{si} \ \ x>60 \end{cases}$